CHUYÊN ĐỀ 2: MŨ VÀ LÔGARIT

BÀI 1: LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Biết các khái niệm và tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên, lũy thừa với số mũ hửu tỉ không nguyên và lũy thừa với số mũ thực.
+ Biết khái niệm và tính chất của căn bậc *n*.
+ Biết khái niệm và tính chất của hàm số lũy thừa.
+ Biết công thức tính đạo hàm của hàm số lũy thừa.
+ Biết dạng đồ thị của hàm số lũy thừa.

❖ **Kĩ năng**

+ Biết dùng các tính chất của lũy thừa để rút gọn biểu thức, so sánh những biểu thức có chứa lũy thừa.
+ Biết khảo sát hàm số lũy thừa.
+ Tính được đạo hàm của hàm số lũy thừa.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho *n* là một số nguyên dương.

- Với *a* tùy ý: $a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$

- Với $a \neq 0$: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (*a*: cơ số, *n*: số mũ).

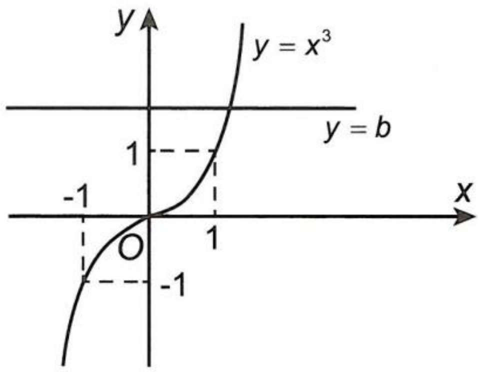
Chú ý:

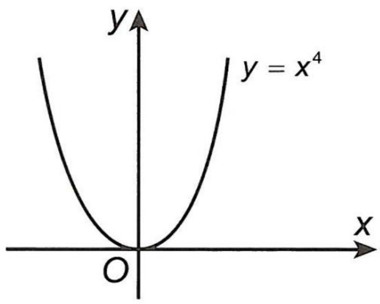
0^0, 0^{-n} không có nghĩa.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ nguyên dương.

2. Phương trình $x^n = b\left(*\right)$

- Với *n* lẻ: Phương trình (*) luôn có nghiệm duy nhất.
- Với *n* chẵn
  + Nếu $b > 0$: Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu.
  + Nếu $b = 0$: Phương trình (*) có một nghiệm $x = 0$
  + Nếu $b < 0$: Phương trình (*) vô nghiệm.





3. Căn bậc n

Khái niệm

Cho $b \in R$, $n \in N^* \left(n \geq 2\right)$. Số *a* được gọi là căn bậc *n* của *b* nếu $a^n = b$.

- Với *n* lẻ và $b \in R$, phương trình $x^n = b$ có duy nhất một căn bậc *n* của *b*, ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$.
- Với *n* chẵn:

$b < 0$: Không có căn bậc n của b.

$b=0$: Có một căn bậc n của 0 là 0. $b>0$: Có hai căn trái dấu, ký hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$. **Tính chất** Với $a,b\ge 0$, $m,n\in N^*$; $p\in \mathbb{Z}$ ta có: • $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b};$ • $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},b>0;$ • $\sqrt[n]{a^p}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^p,\left(a>0\right);$ • $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a};$ • $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a \text{ khi n lẻ} \\ \left\| a \right\| \text{ khi n chẵn.}\end{cases}$ **4. Lũy thừa với số mũ hửu tỉ** Cho số thực a dương và số hửu tỉ $r=\frac{m}{n}$, trong đó $m\in \mathbb{Z},n\in \mathbb{N}^*$. Lũy thừa của a với số mũ r được xác định như sau: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. **5. Lũy thừa với số mũ vô tỉ** Cho $a>0$, α là một số vô tỉ. Ta thừa nhận rằng luôn có một dãy số hữu tỉ $\left(r_n\right)$ mà $\alpha=\lim\limits_{n\to +\infty} r_n$ và một dãy số tương ứng $\left(a^{r_n}\right)$ có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy số $\left(r_n\right)$. Khi đó ta kí hiệu $a^\alpha=\lim\limits_{n\to +\infty} a^{r_n}$ là lũy thừa của a với số mũ α. **6. Lũy thừa với số mũ thực** **Tính chất** Với mọi *a, b* là các số thực dương; α, β là các số thực tùy ý, ta có: • $a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta};$ • $\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta};$	**Ví dụ:** $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

• $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$;

• $\left(a.b\right)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$;

• $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

So sánh hai lũy thừa

• So sánh cùng cơ số

- Nếu cơ số $a>1$ thì $\alpha>\beta\Leftrightarrow a^{\alpha}>a^{\beta}$.

- Nếu cơ số $0<a<1$ thì $\alpha>\beta\Leftrightarrow a^{\alpha}<a^{\beta}$.

Ví dụ:

$2,5>1,2\Leftrightarrow\left(\pi\right)^{2,5}>\left(\pi\right)^{1,2}$

$-0,5>-1,1\Leftrightarrow\left(0,3\right)^{-0,5}<\left(0,3\right)^{-1,1}$

• So sánh cùng số mũ

- Nếu số mũ $\alpha>0$ thì $a>b>0\Rightarrow a^{\alpha}>b^{\alpha}$.

- Nếu số mũ $\alpha<0$ thì $a>b>0\Rightarrow a^{\alpha}<b^{\alpha}$.

Ví dụ:

$\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^{0,8}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0,8}$

$\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}\Rightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-0,8}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0,8}$

HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Khái niệm hàm số lũy thừa

Hàm số $y=x^{\alpha}$, với $\alpha\in\mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

Chú ý: Tập xác định của hàm số $y=x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α.

Cụ thể:

• α nguyên dương: $D=\mathbb{R}$;

• α nguyên âm hoặc bằng 0: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$;

• α không nguyên: $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ví dụ: Tập xác định của hàm số

$y=x^{5}$ là $D=\mathbb{R}$;

$y=x^{-5}$ là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$;

$y=x^{\frac{2}{7}}, y=x^{\pi}$ là $D=\left(0;+\infty\right)$.

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x>0$ và:

• $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$;

• $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}.u'$ với *u* là biểu thức chứa *x*.

Ví dụ: Đạo hàm của hàm số

$y=x^{-5}$ là $y'=-5.x^{-6}$;

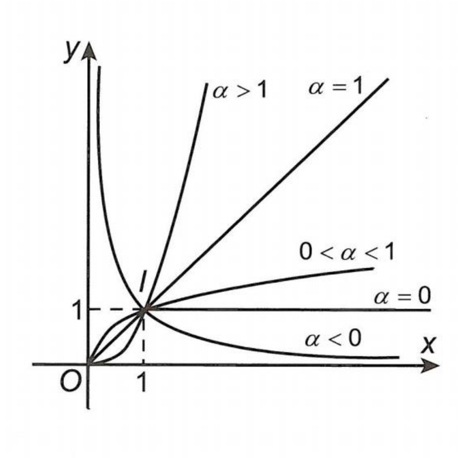
$y=\sin^{2}x$ là

$y'=2\sin x.\left(\sin x\right)'=2\sin x.\cos x$

3. Khảo sát hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$

$y=x^{\alpha},\ \alpha>0$	$y=x^{\alpha},\alpha<0$
a. Tập khảo sát: $\left(0;+\infty\right)$	**a.** Tập khảo sát: $\left(0;+\infty\right)$
b. Sự biến thiên: • $y'=\alpha x^{\alpha-1}>0,\ \forall\ x>0$	**b.** Sự biến thiên: • $y'=\alpha x^{\alpha-1}<0,\ \forall\ x>0$

Lưu ý: *Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: Khảo sát các hàm số $y=x^{3}$ trên tập xác định của nó là $\mathbb{R}$, khảo sát hàm*

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr>
<td>Hàm số luôn đồng biến.
• Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0, \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty.$
• Tiệm cận: Không có.</td>
<td>Hàm số luôn nghịch biến.
• Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0.$
• Tiệm cận:
Trục Ox là tiệm cận ngang.
Trục Oy là tiệm cận đứng.</td>
</tr>
<tr>
<td>c. Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>$0 \qquad +\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$0 \nearrow +\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>c. Bảng biến thiên:
<table>
<tr><td>x</td><td>$0 \qquad +\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty \searrow 0$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>
d. Đồ thị:


</td>
<td>số $y = x^{-2}$ trên tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số lũy thừa luôn đi qua điểm $I(1;1)$.</td>
</tr>
</table>

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

LŨY THỪA

a^{α}

Định nghĩa

Tính chất

$a \in \mathbb{R}, \alpha = n \in \mathbb{N}^*$

$a^n = \underbrace{a.a \ldots a}_{n \text{ thừa số}}$

$0^0, 0^{-n}$ không có nghĩa

$a \neq 0, \alpha = \pm n \in \mathbb{Z}$

$a^0 = 1; a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a > 0, \alpha = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$

$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a > 0, \alpha$ là số vô tỉ

$\exists (r_n): \lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \alpha$

$\Rightarrow a^{\alpha} = \lim\limits_{n \to +\infty} a^{r_n}$

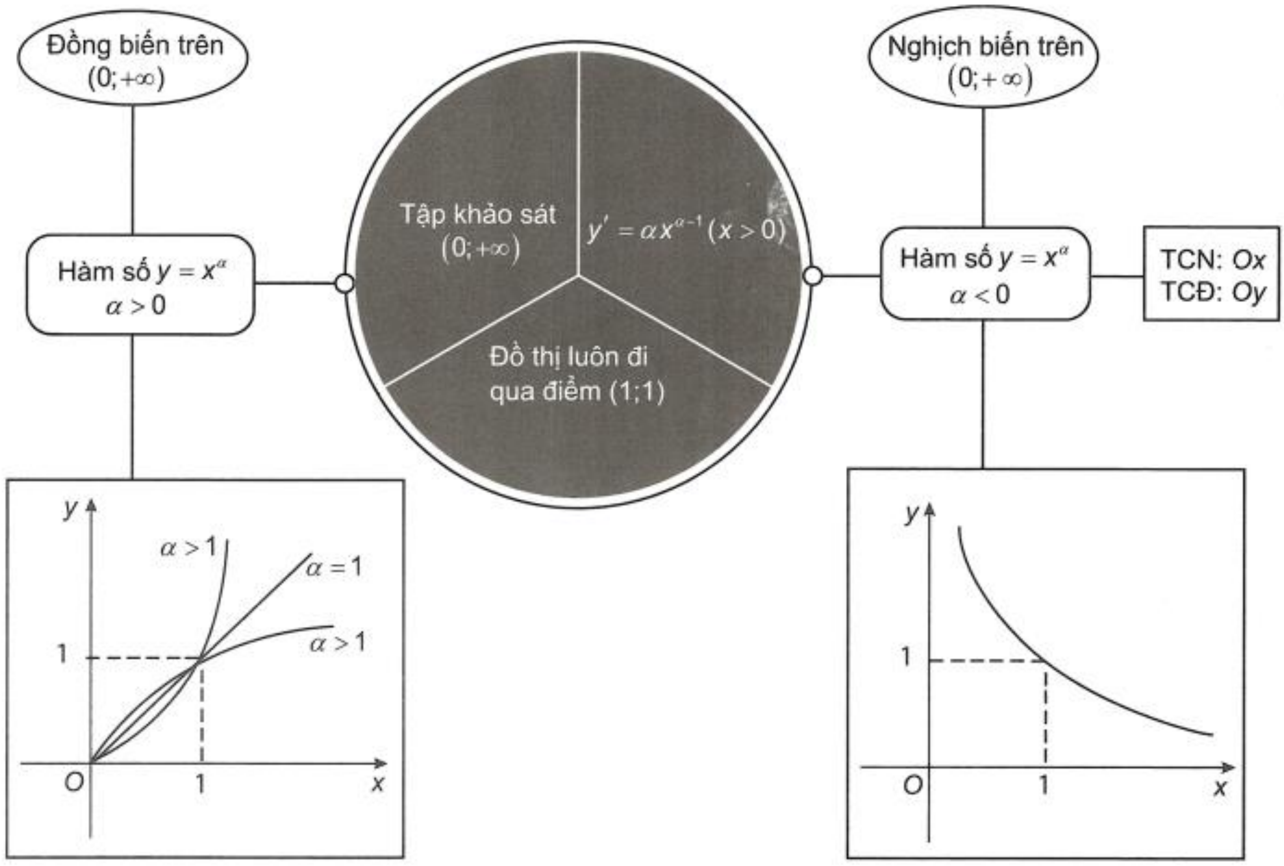
$a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

$a^{\alpha}.a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$ $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha.\beta}$ $(a.b)^{\alpha} = a^{\alpha}.b^{\alpha}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$	$a > 1;\ \alpha > \beta \Leftrightarrow a^{\alpha} > a^{\beta}$ $0 < a < 1;\ \alpha > \beta \Leftrightarrow a^{\alpha} < a^{\beta}$ $\alpha > 0;\ a > b > 0 \Rightarrow a^{\alpha} > b^{\alpha}$ $\alpha < 0;\ a > b > 0 \Rightarrow a^{\alpha} < b^{\alpha}$

$b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* (n \geq 2)$ — Căn bậc n của b

- n lẻ — Có duy nhất $\sqrt[n]{b}$
- n chẵn
  - $b < 0$ — Không tồn tại
  - $b = 0$ — $\sqrt[n]{0} = 0$
  - $b > 0$ — $\sqrt[n]{b}$; $-\sqrt[n]{b}$

HÀM SỐ LŨY THỪA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Lũy thừa

Bài toán 1. Viết lũy thừa với dạng số mũ hữu tỷ

Bài toán 1.1. Thu gọn biểu thức chứa căn thức

- **Phương pháp giải**

Tính chất của căn bậc n

- $\sqrt[n]{ab} = \left[\begin{array}{l} \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \text{ Khi } n \text{ lẻ} \\ \sqrt[n]{|a|}.\sqrt[n]{|b|} \text{ Khi } n \text{ chẵn} \end{array}\right.$;

- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ Khi } n \text{ lẻ } (b \neq 0) \\ \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}} \text{ Khi } n \text{ chẵn } (b \neq 0) \end{array}\right.$;

- $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p, (a > 0)$;

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$;

- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ khi } n \text{ lẻ} \\ |a| \text{ khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$.

Công thức lũy thừa với số mũ thực

- $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$;
- $a^m.a^n = a^{m+n}$;
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
- $a^m.b^m = \left(a.b\right)^m$;
- $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho x là số thực dương. Biểu thức $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là **A.** $x^{\frac{7}{12}}$. **B.** $x^{\frac{5}{6}}$. **C.** $x^{\frac{12}{7}}$. **D.** $x^{\frac{6}{5}}$. **Hướng dẫn giải.** Ta có: $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{x^2x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{7}{3}}} = \left(x^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$. **Chọn A.**	*Điều kiện x là số thực dương làm cho biểu thức ở dạng thũy thừa với số mũ hữu tỉ xác định.*
Ví dụ 2: Cho hai số thực dương *a* và *b*. Biểu thức $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là **A.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{7}{30}}$. **B.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{31}{30}}$. **C.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{30}{31}}$. **D.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$. **Hướng dẫn giải** Ta có: $\sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}} = \sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{2}}}}$ $= \sqrt[5]{\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{-1}{6}}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{5}{6}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$. **Chọn D.**	

Bài toán 1.2. Thu gọn biểu thức chứa lũy thừa

Phương pháp giải

Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

- $\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;
- $\left(a\pm b\right)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$;
- $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$;
- $a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$;
- $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho $P=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}$. Biểu thức rút gọn của P là

A. x. **B.** $2x$. **C.** $x+1$. **D.** $x-1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x}\right)^{-1}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\frac{x}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}=x$

Chọn A.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $\left(\frac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\frac{a^{0,5}-2}{a-1}\right).\frac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}}$ (với $0<a\neq 1$) ta được

A. $\frac{a-2}{2}$. **B.** $\frac{a-1}{2}$. **C.** $\frac{2}{1-a}$. **D.** $\frac{2}{a-1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\frac{a^{0,5}-2}{a-1}\right).\frac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}}$

$$=\left[\frac{a^{0,5}+2}{\left(a^{0,5}+1\right)^2}-\frac{a^{0,5}-2}{\left(a^{0,5}-1\right)\left(a^{0,5}+1\right)}\right].\frac{a^{0,5}+1}{a^{0,5}}$$

$$=\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}+1}-\frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}-1}\right).\frac{1}{a^{0,5}}$$

$$=\frac{a+a^{0,5}-2-a+a^{0,5}+2}{a-1}.\frac{1}{a^{0,5}}=\frac{2}{a-1}$$

Chọn D.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3$ (với $x>0, x\neq 1$) ta được

A. x^2. **B.** $-x^2$. **C.** $-x^3$. **D.** x^3.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\left[\dfrac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3$

$$=\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt[4]{x^2}+\sqrt[4]{x}+1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x}+1-\sqrt{x}\right)}\right]^3$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}\right]^3=\left(\frac{x\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}}\right)^3=-x^3.$$

Chọn C.

Bài toán 2. Tính giá trị biểu thức

- **Phương pháp giải**

Công thức đặc biệt	Thật vậy, ta có:
$f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ thì $f(x)+f(1-x)=1$.	$f(1-x)=\dfrac{\dfrac{a}{a^x}}{\dfrac{a}{a^x}+\sqrt{a}}=\dfrac{a}{a+\sqrt{a}.a^x}$ $\Rightarrow f(1-x)=\dfrac{\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}$ Nên: $f(x)+f(1-x)=1$.

- **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Cho $f(x)=\dfrac{2018^x}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính giá trị biểu thức sau đây ta được

$S=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)$

A. $S=2018$. **B.** $S=2019$. **C.** $S=1009$. **D.** $S=\sqrt{2018}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f\left(1-x\right)=\dfrac{\sqrt{2018}}{2018^{x}+\sqrt{2018}}\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1$

Suy ra $S=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)+$

$$+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2017}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{1009}{2019}\right)+f\left(\dfrac{1010}{2019}\right)=1009.$$

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho $9^{x}+9^{-x}=23$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{5+3^{x}+3^{-x}}{1-3^{x}-3^{-x}}$ ta được

A. -2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $9^{x}+9^{-x}=23\Leftrightarrow\left(3^{x}+3^{-x}\right)^{2}=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x}+3^{-x}=5\\3^{x}+3^{-x}=-5\ \left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$

Từ đó, thế vào $P=\dfrac{5+\left(3^{x}+3^{-x}\right)}{1-\left(3^{x}+3^{-x}\right)}=\dfrac{5+5}{1-5}=-\dfrac{5}{2}$.

Chọn D.

Dạng 2: Hàm số lũy thừa

Bài toán 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

<table>
<tr>
<td>

Phương pháp giải

Ta tìm điều kiện xác định của hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^{\alpha}$, dựa vào số mũ α của nó như sau:

• Nếu α là số nguyên dương thì không có điều kiện xác định của $f\left(x\right)$.

• Nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0 thì điều kiện xác định là $f\left(x\right)\neq 0$.

• Nếu α là số không nguyên thì điều kiện xác định là $f\left(x\right)>0$.

</td>
<td>

Ví dụ: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^{2}-6x+5\right)^{-3}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{1;5\right\}$.

C. $\left(1;5\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)\cup\left(5;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Số mũ -3 là số nguyên âm. Do đó, điều kiện xác định của hàm số là: $x^{2}-6x+5\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq 5\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}\setminus\left\{1;5\right\}$.

Chọn B.

</td>
</tr>
</table>

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tập xác định của hàm số $y=\left(-x^{2}+5x-6\right)^{-\frac{1}{5}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$. **B.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

C. $(2;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Số mũ $-\dfrac{1}{5}$ không phải là số nguyên. Do đó, điều kiện xác định của hàm số là:

$-x^2+5x-6>0 \Leftrightarrow x\in(2;3)$. Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $(2;3)$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Tập xác định của hảm số $y=x^{\sin(2018\pi)}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y=x^{\sin(2018\pi)}=x^0$ nên tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Chọn C.

Ví dụ 3: Tập xác định của hảm số $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{-2019}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Vì số mũ -2019 là số nguyên âm nên điều kiện xác định của hàm số là

$1+\sqrt{x}\neq 0,$ ngoài ra hàm số còn chứa căn thức bậc hai nên $x\geq 0$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}1+\sqrt{x}\neq 0 \ (\text{luôn đúng } \forall x\geq 0)\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0.$

Vậy $D=[0;+\infty)$.

Chọn D.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-2018;2018)$ để hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{5}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** Vô số

Hướng dẫn giải

Vì số mũ $\sqrt{5}$ không phải là số nguyên nên hàm số xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'<0\\ a>0 \left(\text{luôn đúng vì } a=1>0\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow 1-\left(-m+1\right)>0$

$\Leftrightarrow m>0$

Mà $\begin{cases} m\in\left(-2018;2018\right) \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m\in\left\{1,2,3,...,2017\right\}$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên của tham số *m* thỏa mãn yêu cầu.

Chọn C.

Bài toán 2. Tính đạo hàm của hàm số lũy thừa

Phương pháp giải

Công thức tính đạo hàm	Ví dụ:
• $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}\left(x>0,\alpha\in\mathbb{R}\right)$; • $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}.u'$ với *u* là biểu thức chứa *x*.	$\left[\left(2x+5\right)^3\right]'=6\left(2x+5\right)^2$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}}$.

A. $y'=-\frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

B. $y'=-\frac{5}{2}x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

C. $y'=\frac{5}{2}x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

D. $y'=\frac{1}{2}x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}-1}.\left(1-x^2\right)'=-\frac{1}{4}\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{4}}.\left(-2x\right)=\frac{1}{2}x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{4}}$.

Chọn D.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của hàm số $y=\left(2+3\cos 2x\right)^4$.

A. $y'=-24\left(2+3\cos 2x\right)^3\sin 2x$.

B. $y'=-12\left(2+3\cos 2x\right)^3\sin 2x$.

C. $y'=24\left(2+3\cos 2x\right)^3\sin 2x$.

D. $y'=12\left(2+3\cos 2x\right)^3\sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=4\left(2+3\cos 2x\right)^3\left(2+3\cos 2x\right)'$

$=4\left(2+3\cos 2x\right)^3\left(-6\sin 2x\right)$

$=-24\left(2+3\cos 2x\right)^3\sin 2x$.

Chọn A.

Ví dụ 3: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x\sin x\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}$.

B. $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(\sin x+x\cos x\right)$.

C. $y'=\frac{2}{3}.\frac{\sin x+x\cos x}{\sqrt[3]{x^2\sin^2 x}}$.

D. $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\cos x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=\frac{2}{3}\left(x\sin x\right)^{\frac{2}{3}-1}.\left(x\sin x\right)'=\frac{2}{3}\left(x-\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}.\left(\sin x+x\cos x\right)$.

Chọn B.

Ví dụ 4: Đạo hàm của hàm số $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{2}{3}}$ là

A. $y'=\frac{-1}{\left(3x+3\sqrt{x}\right).\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}$. **B.** $y'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}.\frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y'=\frac{-1}{\left(x+\sqrt{x}\right).\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}$. **D.** $y'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{2}{3}-1}.\left(1+\sqrt{x}\right)'=-\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=-\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-\frac{5}{3}}.\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{-1}{\left(3x+3\sqrt{x}\right).\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}.$$

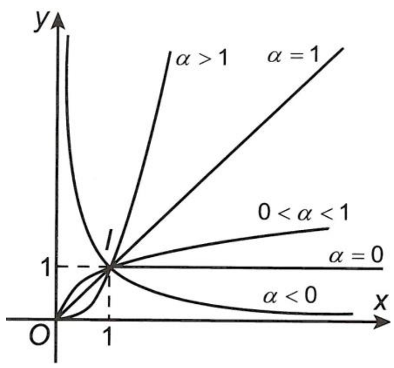
Chọn A.

Bài toán 3. Khảo sát sự biến thiên và nhận dạng đồ thị của hàm số lũy thừa

<table>
<tr>
<td>

Phương pháp giải

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y=a^{\alpha}$ trên $\left(0;+\infty\right)$:



</td>
<td>

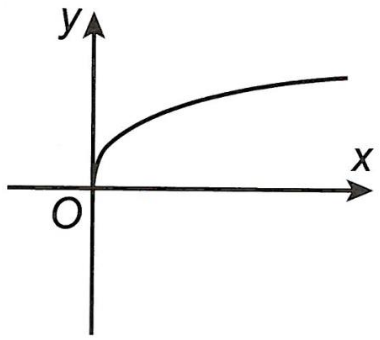
Lưu ý: Khi khảo sát hàm số lũy thùa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: Khảo sát các hàm số $y=x^3$ trên tập xác định của nó là $\mathbb{R}$, khảo sát hàm số $y=x^{-2}$ trên tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số lũy thừa luôn đi qua điểm $I\left(1;1\right)$.

</td>
</tr>
</table>

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi $f\left(x\right)$ có thể là hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

A. $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$. **B.** $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$. **C.** $f\left(x\right)=x^{-\frac{1}{3}}$. **D.** $f\left(x\right)=x^{3}$.	

Hướng dẫn giải

Hàm số có tập xác định là $D=\left(0;+\infty\right)$, loại đáp án B, D.

Hàm số đồng biến trên D, loại C.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^{-\sqrt{2}}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số tăng trên $\left(0;+\infty\right)$.

B. Đồ thị $\left(C\right)$ không có tiệm cận.

C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

D. Hàm số không có cực trị.

Hướng dẫn giải

Hàm số có tập xác định là $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $y'=-\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1}<0,\forall x\in D$.

Hàm số nghịch biến trên $D\Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

Chọn D.